●２０１６年　センター入試問題　数Ⅱ　問３（図形と方程式）

2016 年 1 月 17 日のセンター試験の数学Ⅱの問 3 では実際に次のような問題が出題された．

第 3 問　(配点　20)

座標平面上に 4 点 A(−1，0)，B(1，0)，P(−1，3)，Q(1，1)がある。線分 PQ 上に点 R をとり，その x 座標を a とする。さらに，三角形 ABR の外接円を C とし，その中心を S とする。

(1)　点 R の座標を a を用いて表すと

$$\left(a,\quad \boxed{\text{アイ}}+\boxed{\text{ウ}}\right)$$

である。

また，線分 AR の中点を M とする。M の座標を a を用いて表すと

$$\left(\frac{\boxed{\text{エ}}-\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\quad \frac{\boxed{\text{キク}}+\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\right)$$

である。

(2)　外接円 C の中心 S は，線分 AB の垂直二等分線と，線分 AR の垂直二等分線 ℓ との交点である。このことを用いて S の座標を求めよう。

線分 AB の垂直二等分線は y 軸である。また，ℓ は，(1)の点 M を通り，傾き $\dfrac{a+\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}-\boxed{\text{ス}}}$ の直線である。

以上のことから，S の座標は

$$\left(\boxed{\text{セ}},\quad \frac{\boxed{\text{ソタ}}a^2+\boxed{\text{チ}}a-\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}a-\boxed{\text{ト}}}\right)$$

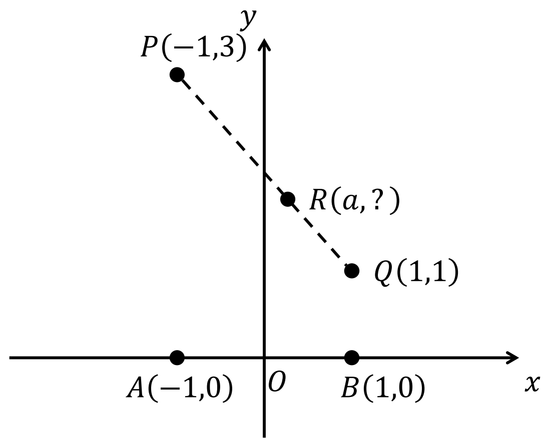
であることがわかる。

(3)　円 C が点 R で直線 PQ に接するときの a の値を求めよう。

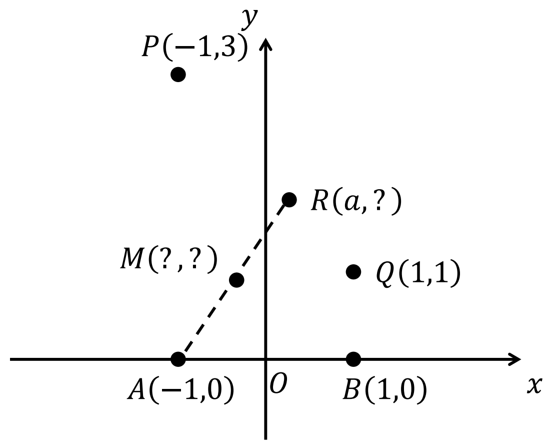
C が直線 PQ に接するとき，直線 RS の傾きは $\boxed{\text{ナ}}$ である。このことと，$-1 \leqq a \leqq 1$ であることから，$a=\dfrac{\boxed{\text{ニ}}-\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

後期で習った中点の公式や直線の方程式で解ける問題である．以下に，左の内容を砕いた問題を示すので，以下の問題を解いていくこと．

ヒント１



ヒント２



(1) 点 R は線分 PQ 上にある点である．つまり，2 点 P，Q を通る直線を求め，x 座標が a のときの y 座標を求めればよい．

（解）2 点 P，Q を通る直線の傾きは $\boxed{\qquad\qquad}$

つまり，直線の方程式は

$$y-\boxed{\quad}=\boxed{\quad}(x-\boxed{\quad})$$

より

$$y=\boxed{\qquad\qquad}\quad\cdots①$$

この①が点 R を通るので，R の x 座標を代入すると

$$y=\boxed{\qquad\qquad}$$

よって，点 R の座標は

$$R(a,\boxed{\qquad\qquad})$$

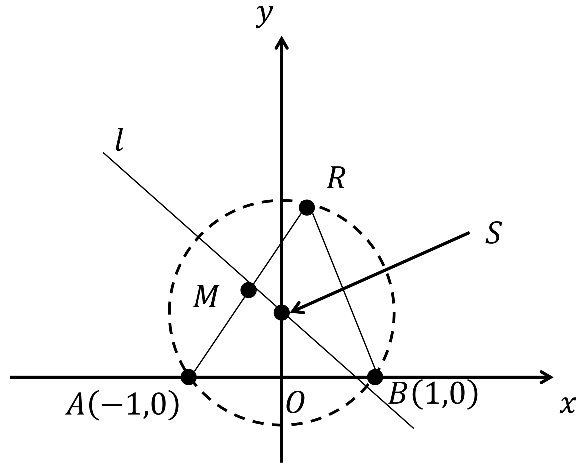
次に，点 M は線分 AR の中点なので，

$$M(\boxed{\qquad},\boxed{\qquad})=(\boxed{\qquad},\boxed{\qquad})$$

(2)

三角形 ARB の外接円は上記の破線の円となる.

ここで, 外接円の中心は S である. S は[1]線分 AB の垂直二等分線 (y 軸), [2]線分 AR の垂直二等分線の交点となる．つまり，AR の垂直二等分線を求めて，点 S を求めればよい.



直線 l の傾きは，線分 AR の傾きと垂直なので，直線 l の傾きを m とすると，次の式に代入すると

$\boxed{\quad\quad} \times m = -1$

$m = \boxed{\quad\quad}$ ・・・②

②は点 M を通るので，直線 l の方程式は

$y - \boxed{\quad} = \boxed{\quad} (x - \boxed{\quad})$

より

$y = \boxed{\quad\quad}$ ・・・③

この③が点 S を通るので，S の x 座標を代入すると

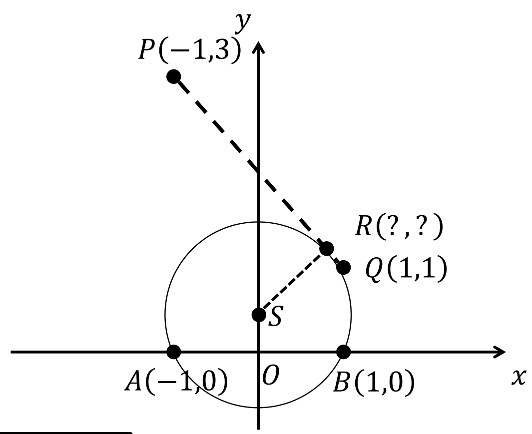
$y = \boxed{\quad\quad}$

よって S の座標は

M($\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}$)

(3)

円 C が点 R で直線 PQ に接するとき，直線 RS は直線 PQ に対して垂直になるので，(1)で求めた線分 PQ の傾きと，直線 RS の傾きを m とすると



$\boxed{\quad\quad} \times m = -1$

$m = \boxed{\quad\quad}$ ・・・④

つまり, 直線 SR は傾きが④で点 R を通る直線となる. 点 R は(1)で求めているので, 直線の方程式から直線を求めると

$y - \boxed{\quad} = \boxed{\quad} (x - \boxed{\quad})$

より

$y = \boxed{\quad\quad}$ ・・・⑤

⑤が円の中心 S を通るので，代入すると

$\boxed{\quad\quad} = \boxed{\quad\quad}$

この式を整理すると次の a に関する 2 次方程式ができる.

$\boxed{\quad\quad} = 0$

これを解の公式を使って解くと

$a = \boxed{\quad\quad}$ ・・・⑥

ここで，a の範囲は P から Q の x 座標なので

$-1 \leqq a \leqq 1$ ・・・⑦

である．よって⑥，⑦より

$a = \boxed{\quad\quad}$